Ce problème comporte 4 parties indépendantes. L'énoncé tient en 4 pages.

Il faudra respecter la numérotation des questions, qui sera clairement indiquée sur votre copie. VOUS METTREZ EN EVIDENCE LES RESULTATS OBTENUS DEMANDES DANS L'ENONCE, PAR EXEMPLE EN LES ENCADRANT.

Notations et définitions

$\mathbb{R}[x,y]$ désigne l'ensemble des polynômes des deux variables x et y à coefficients dans $\mathbb{R}$; ce sont donc des sommes de termes de la forme $a_{i,j}x^iy^j$. On regroupe en un seul terme tous ceux correspondant à un même couple d'exposants (i,j). Sous cette forme, le degré total d'un tel polynôme est la plus grande valeur de i+j pour laquelle le coefficient devant x^iy^j est non nul; on désignera également ce degré total par l'expression " le degré du polynôme " et cette quantité sera simplement notée deg; on notera de la même manière sans risque de confusion le degré d'un polynôme d'une seule variable.

Dans les parties I, II et III, les polynômes ou fonctions polynomiales considérés sont à coefficients dans $\mathbb{R}$. Dans la partie IV, on notera $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ.

On se place dans un repère orthonormé du plan. x et y désignent les coordonnées d'un point dans ce repère.

Un point d'une courbe définie par P(x,y) = 0 est dit singulier si en ce point les deux dérivées partielles de P sont nulles.

Partie I

1) Soit D(u) la droite d'équation $(4u^2+16u+7)x + (2u^2+8u+17)y + (4u^2-2u-2) = 0$, u étant un paramètre réel. Déterminer la courbe (C_1) enveloppe des droites D(u). On ne demande pas de tracer la courbe mais on déterminera ses asymptotes. La recherche des équations de (C_1) fera apparaitre une valeur particulière de u; on précisera laquelle et ce qui se passe pour (C_1) quand u se rapproche de cette valeur.

2) a - Déterminer l'équation cartésienne $P_1(x,y) = 0$ de l'hyperbole passant par le point de coordonnées (1/2, 0) et d'asymptotes y = x-2 et y = -2x -2.

b - Comparez cette hyperbole avec la courbe (C_1)

3) a - Soit $\Delta(t)$ la droite passant par le point de coordonnées (1/2 , 0) et de vecteur directeur $\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)$. Elle recoupe (C_1) en un point noté M(t). Montrer que ceci permet d'obtenir en fonction du paramètre t une autre représentation paramétrique de la courbe (C_1) privée d'un point M' que l'on précisera.

b - Montrez que l'on peut obtenir à partir des formules donnant x et y en fonction de u, par une combinaison linéaire dont les coefficients sont des fonctions simples de u, une relation liant u,x,y où ces 3 quantités sont au premier degré. En déduire une expression explicite de u en fonction de x et y n'utilisant pas de radical (c'est à dire de symbole $\sqrt{\ }$).

c - En déduire que, sauf pour le point M', le paramètre u et le paramètre t correspondant à un même point M de (C_1) sont liés par une relation homographique que l'on explicitera sous la forme $u = \frac{at+b}{ct+d}$. Que proposez-vous pour le point M' ?

Partie II

Une conique est une partie du plan définie par une relation $P(x,y) = 0$ où P est un polynôme non nul de degré 2.

1) (Γ) est la courbe définie par les relations $x = \frac{p(t)}{r(t)}$ $y = \frac{q(t)}{r(t)}$ où p,q,r sont des fonctions polynomiales telles que Sup(deg p, deg q, deg r) = 2. Montrer sans calcul, par des arguments utilisant la dimension d'un espace vectoriel de polynômes qu'il existe un polynôme P non nul de degré inférieur ou égal à 2 tel que $(x,y) \in (\Gamma) \Rightarrow P(x,y) = 0$. On ne demande pas d'examiner si le degré de P est exactement égal à 2. En déduire que (Γ) est une partie d'une conique (C).

2) Soit P un polynôme non nul de degré 2 qui ne peut pas s'écrire comme produit de 2 polynômes de degré 1. (C) est la conique d'équation $P(x,y) = 0$. On suppose que (C) est une partie infinie du plan. On note $P_x(y)$ la quantité $P(x,y)$ considérée comme un polynôme en y dont les coefficients dépendent de x.

a - Montrer que sur une droite, il ne peut y avoir plus de deux points de (C).

b - Soit $x = \frac{p(t)}{r(t)}$ $y = \frac{q(t)}{r(t)}$ et $x = \frac{a(u)}{c(u)}$ $y = \frac{b(u)}{c(u)}$ les équations de deux courbes (Γ_1) et (Γ_2) où p, q, r, a, b, c sont des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. On suppose que (Γ_1) et (Γ_2) sont incluses dans (C) et qu'il existe une partie infinie (C') commune à (Γ_1) et (Γ_2). On notera I l'ensemble des valeurs réelles de t qui fournissent un point de (C').

Montrer que (C') n'est incluse dans aucune droite.

c - Montrer que Sup(deg p, deg q, deg r) = 2 .

3) On note $a(u) = a_0u^2 + a_1u + a_2$, $b(u) = b_0u^2 + b_1u + b_2$, $c(u) = c_0u^2 + c_1u + c_2$

a - Montrer que pour tout t dans I il existe un réel u et un réel non nul k tels que $\begin{cases} a(u) = kp(t) \\ b(u) = kq(t) \\ c(u) = kr(t) \end{cases}$. En déduire que le déterminant $\begin{vmatrix} a_1u + a_2 & a_0 & p(t) \\ b_1u + b_2 & b_0 & q(t) \\ c_1u + c_2 & c_0 & r(t) \end{vmatrix}$ est nul, puis que u est une fonction rationnelle de t formée au numérateur et au dénominateur de combinaisons linéaires de p, q, r. On démontrera que le numérateur et le dénominateur ne sont ni l'un ni l'autre la fonction nulle. On notera m(t) le numérateur et *l* (t) le dénominateur gardés sous la forme de combinaisons linéaires de p, q, r.

b - Montrer un résultat analogue pour u^2; on notera n(t) son numérateur.

c - Par des considérations portant sur la forme irréductible ou non irréductible de la fraction m(t)/*l* (t) et sur le degré des numérateurs et dénominateurs de u et u^2, montrer que u est une fonction homographique de t pour tout t dans I. ON VEILLERA PARTICULIEREMENT A UNE REDACTION CLAIRE DE CETTE QUESTION.

Partie III

1) On pose $u(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3-12t}}$.

a - Déterminer le domaine de définition de u, noté J.

b - Montrer que u est bijective de J vers un ensemble J' dont on précisera la forme. Précisez la borne inférieure de J'; on ne demande pas d'autre valeur numérique pour caractériser J'. On note f la fonction réciproque.

c - Montrer que f est dérivable sur l'intérieur de J'.

2) On pose $x = f(u)$ $y = f'(u)$ u variant dans l'intérieur de J'. On définit ainsi une courbe (γ) que l'on ne demande pas de tracer.

a - Trouver un polynôme Q(x,y) à coefficients réels tel que $(x,y) \in (\gamma) \Rightarrow Q(x,y) = 0$.

b - Montrer que cette courbe n'a pas de point singulier.

3) Soit G un polynôme de degré exactement égal à 3. On considère la courbe définie par $G(x,y) = 0$; on la note (G) sans craindre de confusion de notation avec G. On suppose que (G) a un point singulier (x_0, y_0).

a - On coupe (G) par la droite $\delta(t)$ passant par le point (x_0, y_0) et de vecteur directeur $\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)$. Montrer que sauf pour au plus 3 valeurs de t, $\delta(t)$ recoupe (G) en un point unique autre que le point (x_0, y_0). On note N(t) ce point.

b - Montrer que les coordonnées de N(t) sont des fonctions rationnelles de t.

Partie IV

1) Dans cette question p, q, r désignent des polynômes de l'indéterminée t qui ne sont pas nécessairement ceux du II. $\mathbb{C}_k[t]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k. Ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel sera muni de la base $(t^k, t^{k-1}, ..., t, 1)$ ATTENTION à l'ordre de ces vecteurs.

On note α le degré de p et β le degré de q. On admettra que " p et q non premiers entre eux" équivaut à l'existence de deux polynômes v_1 et v_2 non nuls tels que $v_1p + v_2q = 0$ et $\deg v_1 < \beta$ et $\deg v_2 < \alpha$. On notera p_i le coefficient de $t^{\alpha-i}$ dans le polynôme p et q_j celui de $t^{\beta-j}$ dans le polynôme q.

a - Justifier l'existence du déterminant des polynômes $(t^{\beta-1}p, t^{\beta-2}p, ..., p, t^{\alpha-1}q, ..., q)$ dans la base donnée ci-dessus.

b - Montrer que "p et q ont une racine commune dans $\mathbb{C}$" équivaut à la nullité du

déterminant d'ordre $\alpha + \beta$

$$\begin{vmatrix}
p_0 & 0 & 0 \dots 0 & q_0 & 0 & 0 \dots & 0 \\
p_1 & p_0 & 0 \dots 0 & q_1 & q_0 & 0 \dots & 0 \\
\dots & & & & & & \\
 & & p_0 & q_{\beta-1} & q_{\beta-2} & & \\
 & & p_1 & q_\beta & q_{\beta-1} & & \\
 & & p_2 & 0 & q_\beta & & \\
 & & & & & & q_0 \\
p_\alpha & p_{\alpha-1} & & & & & q_1 \\
0 & p_\alpha & & & & & \\
\dots & & & & & & \\
0 & 0 & p_\alpha & 0 & & 0 & q_\beta
\end{vmatrix}$$

β colonnes α colonnes

On notera par la suite R(p,q) le déterminant construit de cette manière pour des polynômes p et q.

P et Q seront deux polynômes de $\mathbb{R}[x,y]$: deg P = α, deg Q = β. On note $P_x(y)$ le polynôme P(x,y) écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{\alpha} p_{\alpha-k}(x)y^k$ et $Q_x(y) = \sum_{l=0}^{\beta} q_{\beta-l}(x)y^l = Q(x,y)$

On admettra qu'il existe un repère éventuellement obtenu par une rotation des axes tel que $p_0(x)$ et $q_0(x)$ soient non nuls. On suppose pour la suite que l'on est dans un tel repère. On note (Δ_1) la courbe d'équation P(x,y) = 0 et (Δ_2) celle d'équation Q(x,y) = 0. On s'intéresse à l'ensemble des points d'intersection de ces deux courbes, que l'on note L.

On fait l'hypothèse supplémentaire qu'il n'existe pas de polynôme non constant qui divise à la fois P et Q.

2) a - Majorer deg $p_i(x)$ en fonction de i et deg $q_j(x)$ en fonction de j.

b - On note z(x) la quantité $R(P_x,Q_x)$. Montrer que $(a,b) \in L \Rightarrow z(a) = 0$. On admettra que l'hypothèse supplémentaire faite sur P et Q implique que le polynôme z(x) n'est pas le polynôme nul.

c - Donner une majoration de deg z en fonction de α et β. On ne demande pas la meilleure majoration possible; ceci sera amélioré dans la suite de cette partie.

d - Montrer que L est un ensemble fini.

3) Cette dernière question a pour objectif de préciser le nombre d'éléments de L.

a - Montrer qu'il existe un repère du plan tel que sur chaque parallèle à l'axe des ordonnées de ce repère il n'y ait qu'un seul point de L.

On admettra ensuite qu'il existe un tel repère dans lequel les coefficients p_0 et q_0 sont également non nuls. On se place pour la suite dans un repère satisfaisant à toutes ces conditions.

b - Dans le déterminant d'ordre $\alpha + \beta$ définissant le polynôme z(x), on note $\omega_{i,j}$ le coefficient qui se trouve sur la i-ième ligne et la j-ième colonne. Donner l'expression de $\omega_{i,j}$ en fonction des polynômes $p_k(x)$ et $q_l(x)$, les indices k et l devant être choisis convenablement. On présentera soigneusement le résultat en discutant selon les valeurs de j et de i-j.

c - Pour chaque permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, \alpha+\beta\}$ on note $r_\sigma(x)$ le polynôme $\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{\alpha+\beta}\omega_{\sigma(j),j}$. On note Ω l'ensemble des permutations σ. Donner l'expression de z(x) en fonction des $r_\sigma(x)$.

d - On note Ω' le sous-ensemble de Ω formé des permutations σ pour lesquelles les conditions suivantes sont vérifiées :

$0 \le \sigma(j) - j \le \alpha$ pour tout j entre 1 et β et
$0 \le \sigma(j) - j + \beta \le \beta$ pour tout j entre $\beta + 1$ et $\beta + \alpha$

Que vaut $r_\sigma(x)$ pour $\sigma \notin \Omega'$? Montrer que pour $\sigma \in \Omega'$ deg $r_\sigma \le \alpha\beta$.

e - Déduire de tout ceci que L contient au plus $\alpha\beta$ éléments distincts.

Fin du problème